2. Les situations inversement proportionnelles

(Aussi appelée : Situation de variation inverse)

* la réponse de la multiplication

Définition : : Il s'agit d'une situation dans laquelle *le produit des variables x multiplié par y est constant *. Dans une telle situation, plus les valeurs de «x» augmentent, plus les valeurs de «y» diminuent.

* donne toujours le même nombre

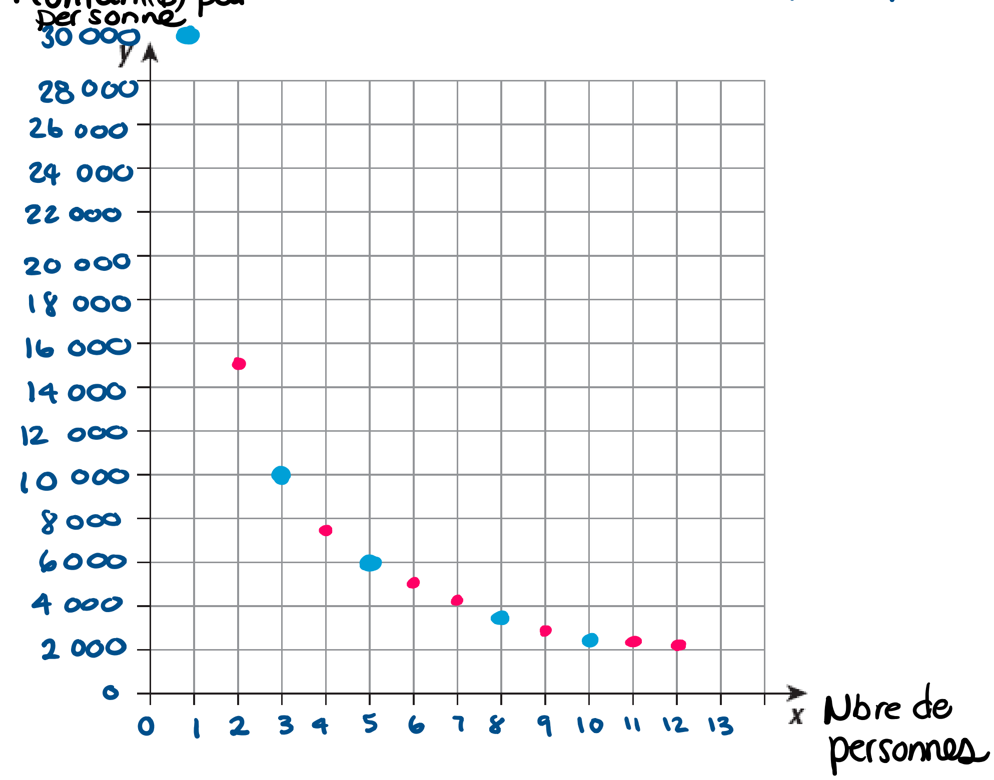
Description en mots : Une troupe de danseurs et de danseuses a remporté une bourse de 30 000$ lors d'un concours. Cette somme est répartie équitablement entre les membres de la troupe. On s'intéresse à la relation entre le nombre de personnes dans la troupe et la part de chacune.

Table des valeurs :

Nombre de personnes	*Montant par personne ($)*
1	30 000
3	10 000
5	6 000
8	3 750
10	3 000

Graphique : Somme reçue par personne

Montant($) par personne



Règle :

$$\text{Montant remis par personne} = \frac{30\,000\ \$}{\text{nb de personne}}$$

$$y = \frac{30000}{x}$$

Comment reconnaître une situation inversement proportionnelle (variation inverse)?

I. *Dans une table de valeurs*

Dans le cas d'une situation de variation inverse, lorsque l'on multiplie les valeurs de la variable x par les valeurs de la variable y associées, le produit est CONSTANT (donne toujours le même nombre) → K

Calcul de la constante K

x	1	2	4	5	…
y	4	2	1	0,8	…

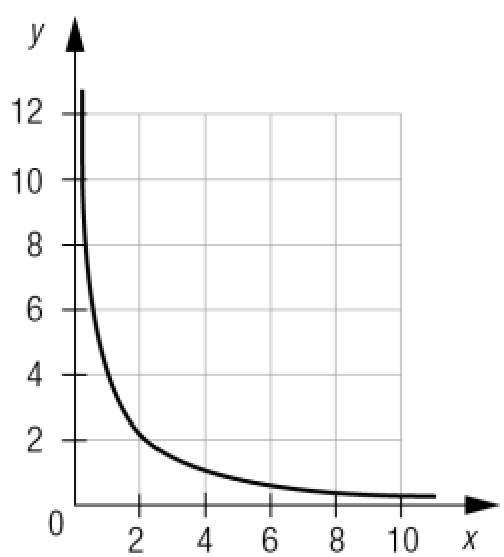
×4

$K_1 = 1 \cdot 4 = 4$
$K_2 = 2 \cdot 2 = 4$
$K_3 = 4 \cdot 1 = 4$
$K_4 = 5 \cdot 0{,}8 = 4$

II. *Dans un graphique*

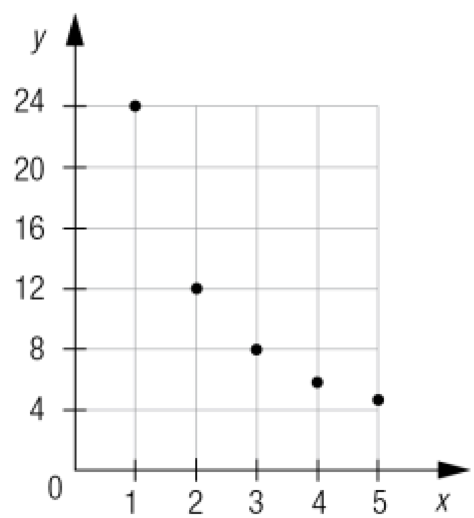
Le graphique représentant une situation de variation inverse est :

Une courbe qui tend à s'approcher des axes sans jamais y toucher.



OU

Une série de points appartenant à une courbe qui tend à s'approcher des axes sans jamais les toucher.



III. À partir d'une règle

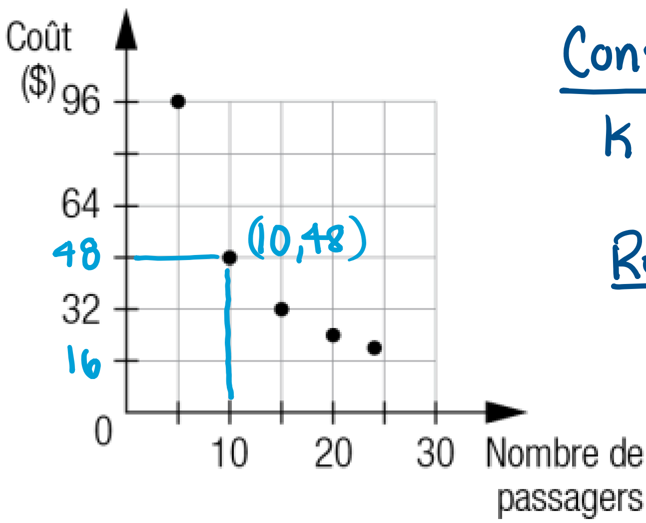
La règle d'une situation de variation inverse est toujours de la forme :

$$y = \frac{k}{x}$$

Où k: une constante dans la situation et il se calcule en multipliant $x \cdot y = k$

Trouve la rège des situations suivantes :

a) Les frais de location d'un autobus pouvant accueillir un maximum de 24 passagers s'élèvent à 480 \$ par jour



Constante $k = x \cdot y$

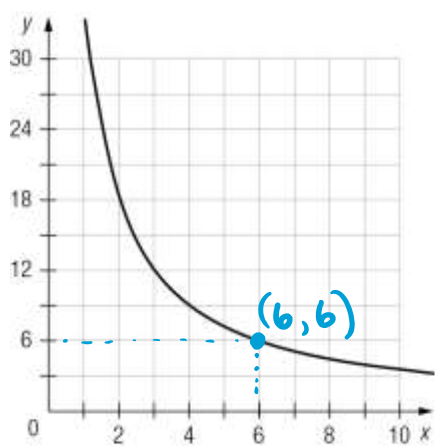
$k = 10 \cdot 48 = 480$

c'est le 480\$ de la situation

Règle:

$$y = \frac{480}{x}$$

b) **Ce graphique**



Constante $k = x \cdot y$

$k = 6 \cdot 6 = 36$

Règle:

$$y = \frac{36}{x}$$

Exemple 1 :

Marie-Geneviève veut peinturer l'appartement qu'elle vient d'acheter. Elle estime qu'il lui faudra 40 heures pour tout peinturer si elle travaille seule. Si on considère que plus il y aura de personnes, moins de temps cela prendra pour peinturer l'appartement, complète la table des valeurs représentant cette situation, trouve la règle de cette situation et trace le graphique.

Table des valeurs :

Nombre de personnes	1	2	4	5	8	10
Temps (heures)	40	20	10	8	5	4

Règle :

$y = \dfrac{40}{x}$

où

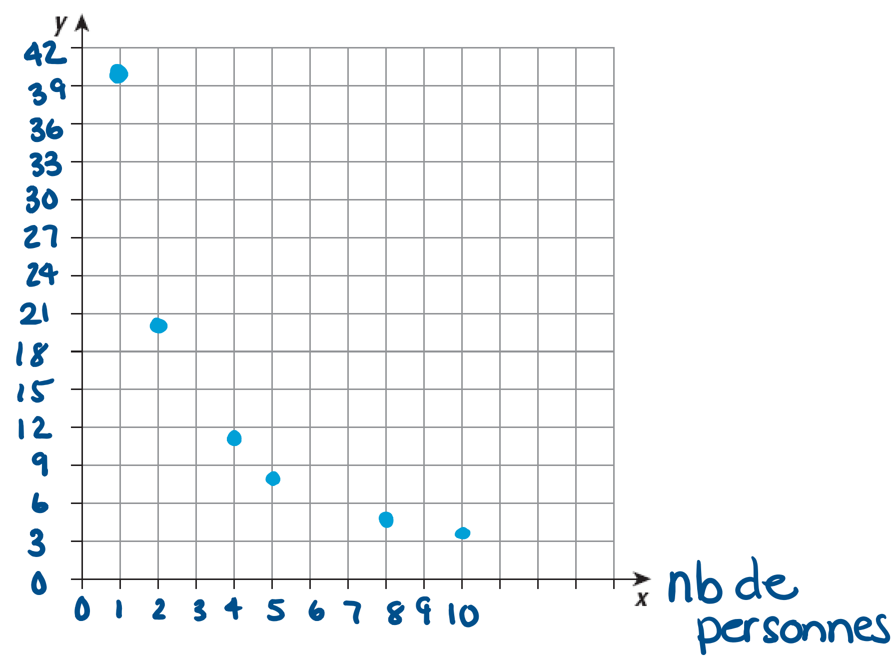
y = nb d'heure

x : nb de personnes

Graphique :

Temps pour peinturer un appartement

Nbre d'heures (h)



Dans une situation de variation inverse, il est possible que certains points ne soient pas réalistes selon le contexte donné. Par exemple, dans la situation précédente, il est peu probable que si 40 personnes se retrouvent dans un appartement pour peinturer, il soit possible de tout faire en 1 heure (manque de matériel, d'espace,…)

Exemple 2 :

Pour une activité, un groupe d'amis loue un véhicule utilitaire sport. Louer une telle voiture pour une seule journée coûte 120$.

Table de valeurs :

Nombre de personnes participant à la location de la voiture (x)	Prix **par personne** pour la location de voiture ($/personne) ($y$)
1	120
2	60
3	40
4	30
5	24
6	20

Règle :

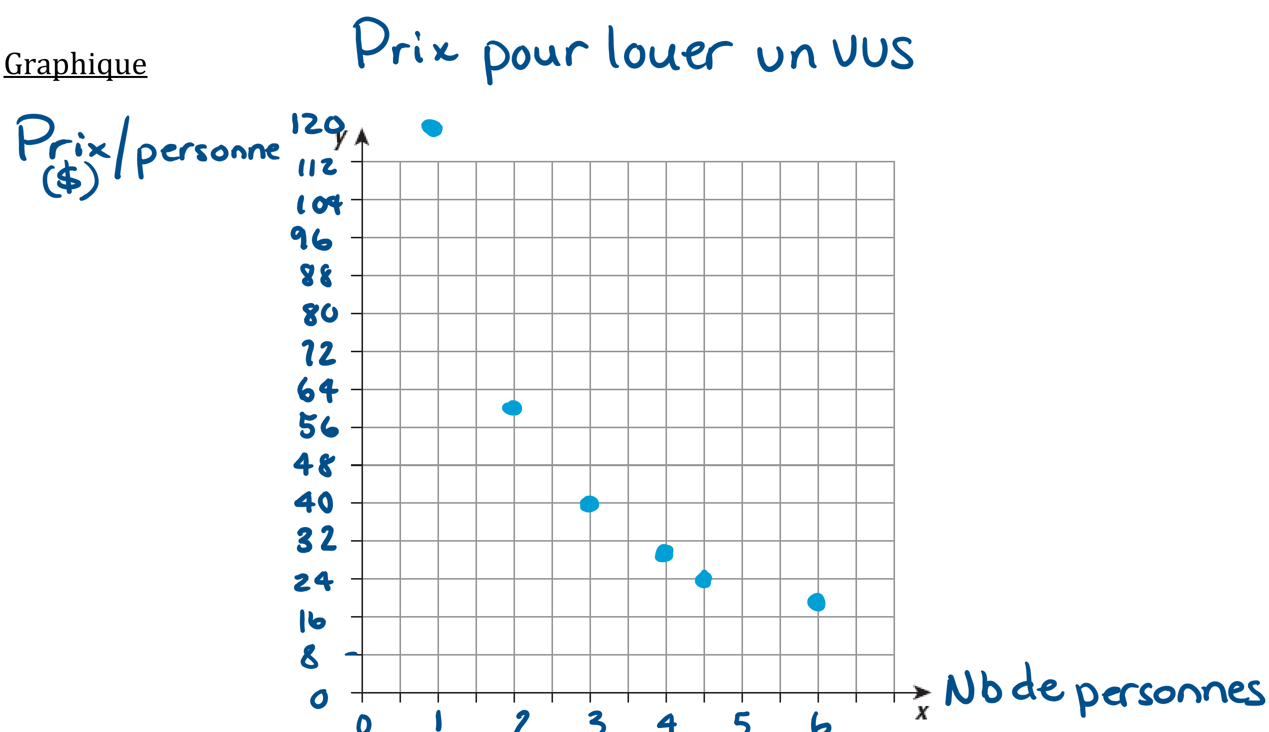
$$y = \frac{120}{x}$$

où

y : prix par personne

x : Nb de personnes

Graphique



Exercice 1 : Pour chacune des tables de valeurs ci-dessous, détermine s'il s'agit d'une situation de proportionnalité, d'une situation inversement proportionnelle.

a)

x	2	3	8	12	24
y	72	48	18	12	6

$K = x \cdot y = 144$

inversement $y = \frac{144}{x}$

b)

x	1	2	3	4	6
y	24	12	8	6	4

$K = x \cdot y = 24$

inversement $y = \frac{24}{x}$

c)

x	0	1	2	3	4	5
y	0	2	8	12	16	20

aucune

d)

x	1	2	3	4	5
y	8	16	24	32	40

$a = \frac{y}{x} = 8$

Proportionnelle $y = 8x$

Exercice 2 : Pour chaque cas, détermine de quel type de situation il s'agit.

a) L'organisateur d'une fête d'anniversaire calcule le montant que chaque invité devra remettre pour le cadeau commun.

inversement proportionnelle

b) Pour amasser des fonds, on demande 2 $ à chaque spectateur d'un défilé de mode.

proportionnelle $y = 2x$

y = Fond amassé($)
x = nb de spectateurs

c) On divise le montant de la location de la patinoire pour une partie de hockey amicale selon le nombre de joueurs.

inversement proportionnelle

d) Durant l'été, Denis reçoit 20 $ chaque fois qu'il passe la tondeuse chez son voisin.

proportionnelle $y = 20x$

y = salaire($)
x = nb de fois quil passe la tondeuse.

3. **Les situations ~~linéaires~~** indirectes

(Aussi appelé situation de variation indirecte ou fonction affine)

Les situations représentées dans un graphique **par une droite oblique ne passant pas par l'origine** se nomment situations ~~linéaires~~ indirectes

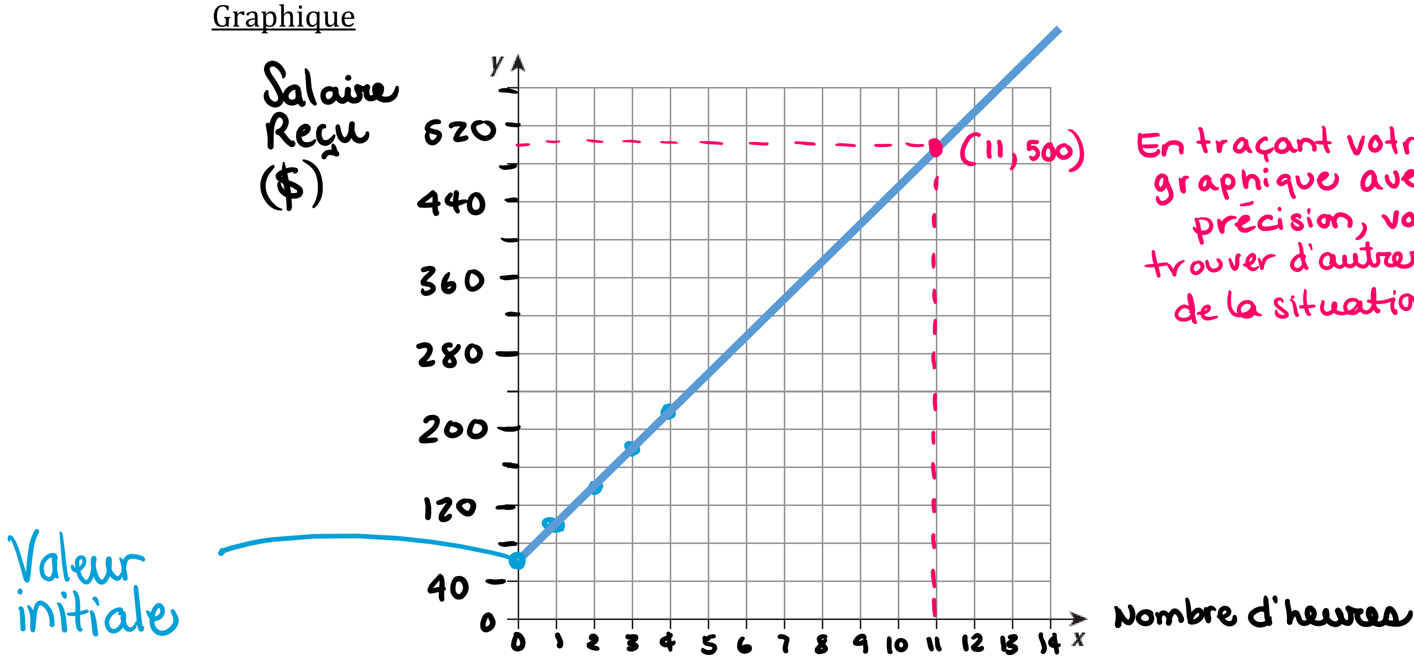
Situation en mots

Jonathan est un plombier, il charge 60$ pour le déplacement et il a un salaire horaire de 40$. On s'intéresse à la relation entre le nombre d'heures travaillées et le salaire reçu.

Table des valeurs

x	nombre d'heures	0	1	2	3	4	5	…
y	salaire reçu ($)	60	100	140	180	220	260	…

Graphique



En traçant votre graphique avec précision, vous pourrez trouver d'autres valeurs de la situation.

indirecte

Comment déterminer la règle d'une situation ~~[illegible]~~?

Avant de trouver la règle, nous devons définir les mots : ***Taux de variation*** et ***Valeur initiale.***

TAUX DE VARIATION (a)

Dans une situation faisant intervenir deux variables, le taux de variation est le rapport entre la variation des y et la variation des x.

$$\text{Taux de variation } (a) = \frac{\text{variation des } y}{\text{variation des } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

"Δ" Symbole delta, signifiant variation

$$\text{Taux de variation } (a) = \frac{\text{bond } y}{\text{bond } x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

formule de sec 3

VALEUR INITIALE (b)

La valeur initiale est la valeur que prend y lorsque x vaut 0.

LA RÈGLE

La règle d'une situation linéaire prend la forme

$$\boldsymbol{y = ax + b}$$

Où $\boldsymbol{a}$: est le taux de variation et $\boldsymbol{b}$: est la valeur initiale

Trouver le **taux de variation** et la **valeur initiale**

- à partir d'une **table de valeurs**

Exemple

bond x

+2

x	0	1	2	3	4	5
y	0	8	16	24	32	40

+16

bond y

Règle : $y = 2x + 0$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+16}{+2} = 2$$

$b =$ 0

Exercices :

Pour chacune des tables de valeurs ci-dessous, détermine le taux de variation et la valeur initiale

a)

+2

x	0	2	4	6	8
y	500	450	400	350	300

−50

Règle: $y = -25x + 500$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-50}{+2} = -25$$

$b =$ 500

b)

x	0	3	6	9	12
Y	16	16	16	16	16

Règle: $y = 0x + 16$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+0}{+6} = 0$$

$b =$ 16

c)

x	0	1	2	3	4	5
y	0	4,5	9	13,5	18	22,5

Règle: $y = 4{,}5x + 0$

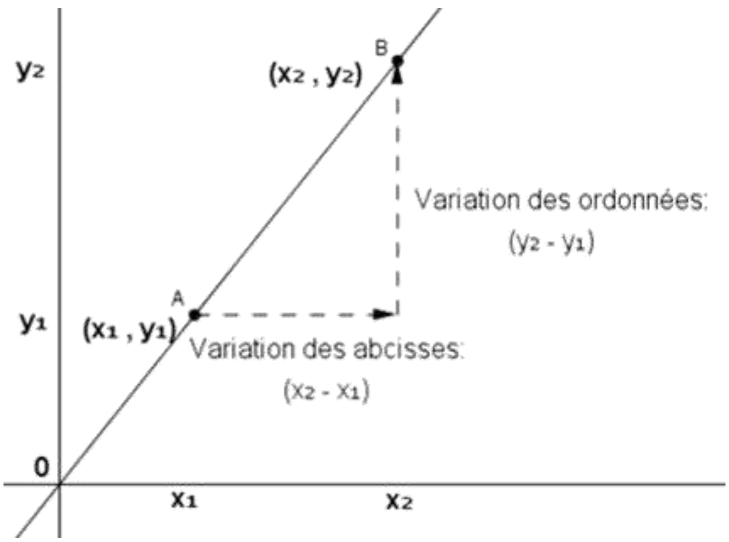
$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+4{,}5}{+1} = 4{,}5$$

$b =$ 0

Trouver **<u>le taux de variation</u>** et **<u>la valeur initiale</u>**

- à partir d'un **<u>graphique.</u>**

Pour trouver le taux de variation, nous devons choisir deux points sur la droite. Pour trouver la valeur initiale, on observe simplement l'endroit où la droite croise l'axe des ordonnées



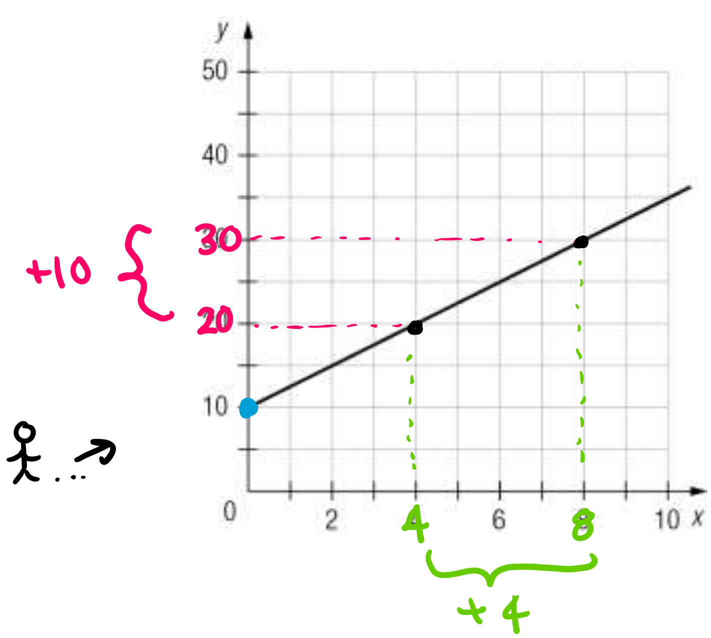
$$Taux\ de\ variation\ (a)$$

$$= \frac{bond\ y}{bond\ x}$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$Valeur\ initiale\ (b) =$$

<u>Exemple</u>



Taux de variation

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+10}{+4} = 2{,}5$$

Valeur initiale

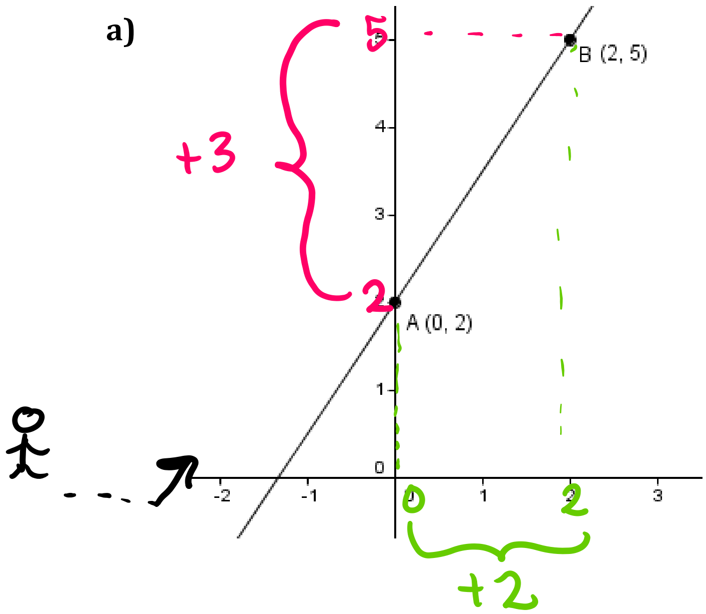
$$b = 10$$

Règle

$$y = 2{.}5x + 10$$

Pour chacun des cas suivants, détermine le taux de variation.

a)

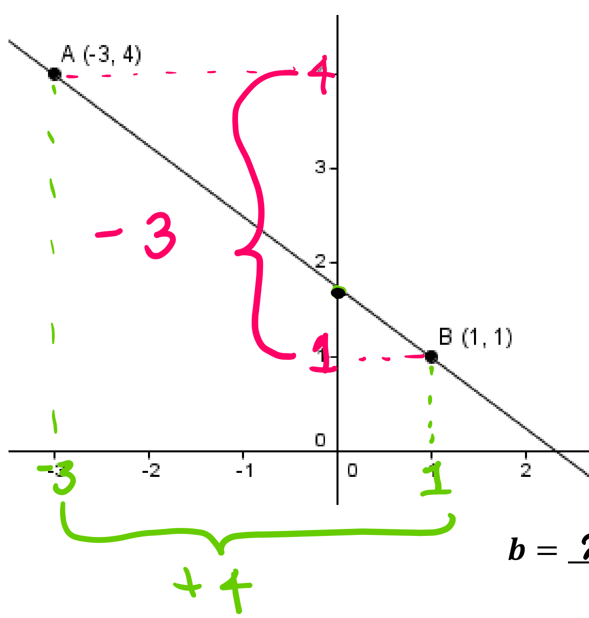


$a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{+3}{+2} = 1{,}5$

$b =$ 2

Règle: $y = 1{,}5x + 2$

b)

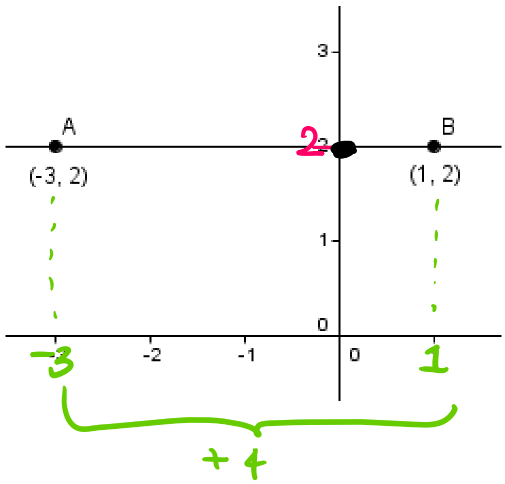


$a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-3}{+4} = -0{,}75$

$b = \approx 1{,}8$

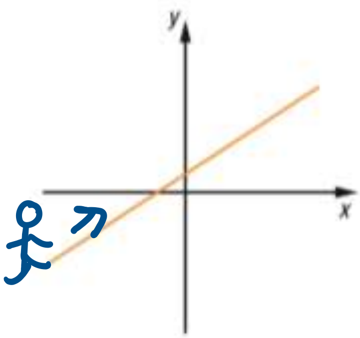
Règle: $y = -0{,}75x + 1{,}8$

Règle : $y = 0x + 2$



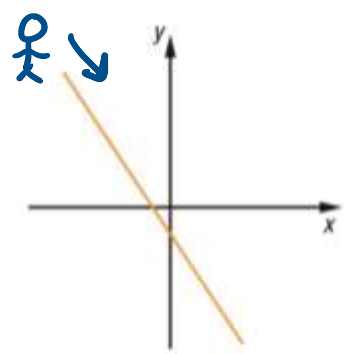
$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+0}{+4} = 0$$

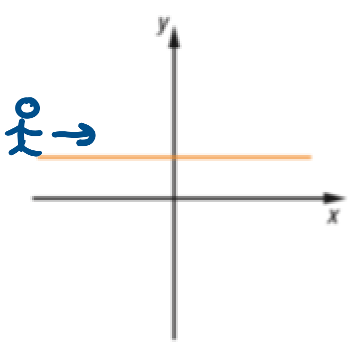
$b =$ 2



Lorsque le taux de variation est un nombre positif, le graphique est représenté par une droite croissante

Lorsque le taux de variation est un nombre nègatif, le graphique est représenté par une droite dēcroissante





Lorsque le taux de variation est nul ($= 0$), le graphique est représenté par une droite horizontale

Il est aussi possible de trouver le **taux de variation** et la **valeur initiale**

- Dans **une situation décrite en mots**

Pour trouver le taux de variation, Il s'agit de trouver le Taux unitaire.

Pour la valeur initiale, il faut se demander la question : « Quel est l'état initial de la situation? » au départ ?

Exercices : Pour chacun des cas ci-dessous, détermine le taux de variation et la valeur initiale qui caractérise les deux variables étudiées.

a) Une entreprise qui fait le ménage demande 40$ par heure travaillée.

$/h

y x

x : nombre d'heures

y : salaire

Règle: $y = 40x + 0$

Taux de variation (a) = 40 $/h

Valeur initiale (b)= 0$

b) Michel prépare sa piscine pour la saison estivale. Elle contient déjà 3500 litres d'eau. Il veut la remplir avec un débit de 450 litres par heure.

x : nombre d'heures

y : nombre de litres

L/h

y/x

Règle: $y = 450x + 3500$

Taux de variation (a) = 450 L/h

Valeur initiale (b)= 3500 L

c) À son club de golf, Sacha paie des frais de 45$ par partie jouée.

x : nombre de parties jouées

y : coût total

$/ partie

y x

Taux de variation (a) = 45 $/partie

Valeur initiale (b)= 0 $

Règle: $y = 45x + 0$

d) Le coût d'un abonnement mensuel en salle d'entraînement est passé de 35$ à 42$ en 10 ans.

$/an

y / x

$35\$ \xrightarrow{+7\$} 42\$$

x : nombre d'années

y : coût de l'abonnement

Règle : $y = 0{,}70x + 35$

Taux unitaire

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+7\$}{10 \text{ ans}} = 0{,}70\$/\text{an}$

Taux de variation (a) = 0,70$/an

Valeur initiale (b)= 35 $

e) À la quincaillerie, la valeur des feuilles de contreplaqué a augmenté de 20$ à 36$ au cours des trois dernières années.

$/année

y / x

x : nombre d'années

y : valeur de la feuille

Règle : $y = 5{,}33x + 20$

Taux unitaire

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+16}{+3} \approx 5{,}33\$/\text{année}$

Taux de variation (a) = 5,33 $/ année

Valeur initiale (b)= 20$

RECHERCHE DE LA RÈGLE DES SITUATIONS ~~LINÉAIRES~~ Indirectes

Peu importe le mode de représentation utilisé, il est possible de trouver la règle :

$y = \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}$ → y = taux variation · x + valeur initiale

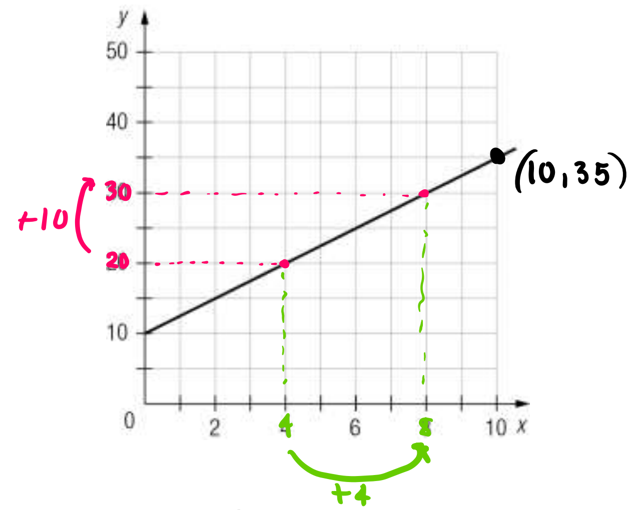
Pour ce faire, nous devons connaître **au minimum deux couples** de coordonnées : (x_1, y_1) et (x_2, y_2).

Ces données sont fournies dans le GRAPHIQUE, dans la Table de valeur, ou dans le contexte en mots

Lorsqu'on donne la règle, il faut toujours déterminer ce que représente les 2 variables, x et y.

Étapes pour déterminer la règle d'une situation ~~linéaire~~ indirecte

- À partir **d'un graphique**



1) Calculer le taux de variation

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+10}{+4} = 2{,}5$$

2) Remplacer dans la règle de taux de variation *a* par sa valeur

$$y = 2{,}5\,x + b$$

3) Trouver la valeur de l'ordonnée à l'origine *b* en observant le graphique.

$$b = 10$$

La règle est : $y = 2{,}5x + 10$

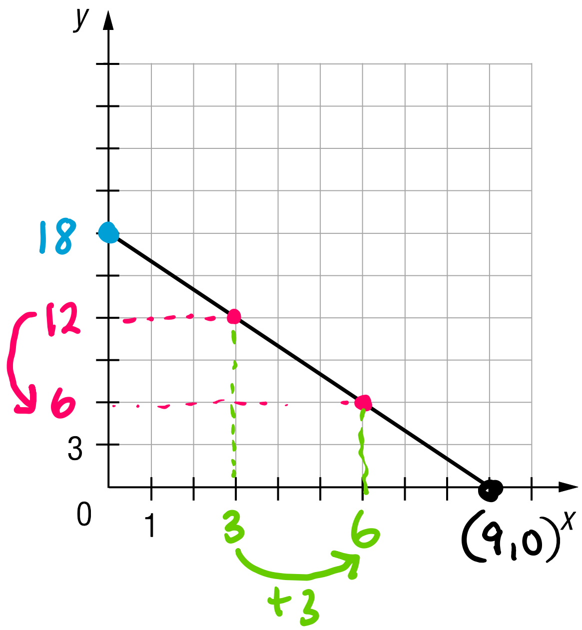
Validation avec un autre couple de valeur :

$(10, 35)$

$x \quad y$

$$y = 2{,}5(10) + 10$$
$$y = 25 + 10$$
$$y = 35$$

À partir de ce graphique :



1) **Calculer le taux de variation**

$$\boxed{a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-6}{+3} = -3}$$

2) **Remplacer dans la règle de taux de variation *a* par sa valeur**

$y = -3x + b$

3) **Trouver la valeur de l'ordonnée à l'origine *b* en observant le graphique.**

$b = 18$

La règle est : $y = -3x + 18$

Validation avec un autre couple de valeur :

$(9, 0)$

$y = -3(9) + 18$

$y = -18 + 18$

$y = 0$

Étapes pour déterminer la règle d'une situation indirecte

- À partir **d'une table des valeurs**

+1

x		4	5	6	7
y		11	12	13	14

+1

1) Calculer le taux de variation

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+1}{+1} = 1$$

2) Remplacer dans la règle de taux de variation *a* par sa valeur

$$y = 1x + b$$

$$y \downarrow 11 \qquad x \downarrow 4$$

3) Remplacer x et y par les coordonnées d'un point.

$$11 = 1(4) + b$$

4) Trouver la valeur de l'ordonnée à l'origine *b* en résolvant la règle.

$$11 = \underline{1 \cdot 4} + b$$

$$11 = 4 + b$$

$$-4 \qquad -4$$

$$7 = b$$

La règle est : $y = 1x + 7$

Validation avec un autre couple de valeur :

$(7, 14)$

$$y = 1(7) + 7$$

$$y = 7 + 7$$

$$y = 14$$

À partir de cette table des valeurs :

$+2$

x	1	2	4	8	16
y	6	14	30	62	126

$+16$

1) Calculer le taux de variation

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+16}{+2} = 8$$

2) Remplacer dans la règle de taux de variation *a* par sa valeur

$$y = 8x + b$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$6 \quad 1$$

3) Remplacer x et y par les coordonnées d'un point.

$$6 = 8(1) + b$$

4) Trouver la valeur de l'ordonnée à l'origine *b* en résolvant la règle.

$$6 = \underline{8(1)} + b$$

$$6 = 8 + b$$

$$-8 \quad -8$$

$$-2 = b$$

La règle est : $y = 8x - 2$

Validation :

$(16, 126)$

$$y = \underline{8(16)} - 2$$

$$y = 128 - 2$$

$$y = 126$$

EXERCICES

1. *Un plant de tomates en pleine croissance mesure présentement 16,4 cm. Au cours des derniers jours, il a eu une croissance quotidienne constante de 1,5 cm. On considère que sa croissance demeure constante.*

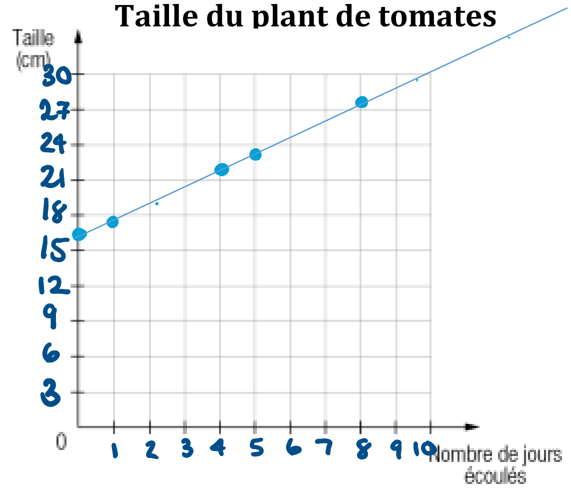
a) Remplis la table de valeurs ci-dessous.

Taille du plant de tomates

Nombre de jours écoulés	Taille (cm)
0	16,4
1	17,9
4	22,4
5	23,9
8	28,4

b) Trace le graphique illustrant cette situation.

Taille du plant de tomates



c) Quelle est la valeur initiale? 16,4 cm

d) Quel est le taux de variation?

$\underbrace{\text{croissance}}_{\text{positif}}$ $\underbrace{\text{quotidienne}}_{\text{par jour}}$

1,5 cm/jour

e) Trouve la règle de cette situation.

$y = 1,5(x) + 16,4$

x : nombre de jours
y : taille du plants en cm

$y = 1,5x + 16,4$

2. *Marco produit des pots de compote de pommes. Il a déjà fait 18 pots et il en produit 7 de plus par heure. (x est le temps et y est le nombre de pots de comporte de pommes).*

a) Quelle est la valeur initiale? 18 pots

b) Quel est le taux de variation?

$\underbrace{\text{7 de plus}}_{\text{positif}}$ par heure

7 pots/heure

c) Trouve la règle de cette situation.

x : nombre d'heures
y : nombre de pots

$y = 7x + 18$

d) S'il travaille 8 heures durant la journée, combien de pots de compote de pommes aura-t-il fait à la fin de sa journée?

x = 8 heures

$y = 7(8) + 18$

y = 74 pots

74 pots

e) Combien d'heures a-t-il travaillé durant la semaine s'il a maintenant 298 pots de compotes de pommes?

x = ?
y = 298 pots

$y = 7x + 18$

$298 = 7x + 18$

$-18 \quad -18$

$\frac{280}{7} = \frac{7x}{7}$

$40 = x$

x = 40 heures travaillées